MPSI 1 - DS 2 - 10/11/2022

Consignes générales :

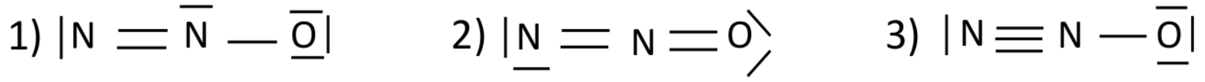
- L'ordre est indifférent, mais on séparera clairement les exercices ;
- il est conseillé de tous les aborder (difficulté progressive dans un exercice).
- Toute question, même qualitative, appelle une réponse argumentée.
- La qualité de la rédaction (*français* et *écriture mathématique*) sera notée.
- La qualité de la présentation également : soin, aération, $\boxed{\text{résultats encadrés}}$.
- Une application numérique sans unité explicite et appropriée ne sera pas prise en compte.
- Pour le nombre de chiffres significatifs à conserver pour le résultat final, on s'aligne sur la donnée la moins précise, avec au moins 2 chiffres significatifs (sauf indication contraire).

1- STRUCTURES MOLECULAIRES (extraits de concours CCINP)

A. Protoxyde d'azote

« Le protoxyde d'azote, ou monoxyde de diazote, est un composé chimique de formule N_2O. Ce gaz incolore a une odeur et un goût légèrement sucrés. Il est utilisé en anesthésie, chirurgie, odontologie comme adjuvant pour ses propriétés anesthésiques et antalgiques. Il est dit « gaz hilarant » car euphorisant à l'inhalation, d'où son usage comme drogue récréative. Comme comburant, il accroît la puissance des moteurs en compétition automobile. » (Wikipédia)

On propose pour ce composé les trois formules de Lewis suivantes :



Discuter dans chaque cas le respect ou non de la règle de l'octet, et indiquer le cas échéant les charges formelles qui apparaissent. Quelle forme vous semble la plus favorisée ?

B. Autour de l'élément oxygène

B-1. Où se trouve l'élément oxygène dans la classification périodique ?
Écrire la structure électronique de l'atome dans son état fondamental.

B-2. On trouve dans la nature les trois isotopes de nombres de masse respectifs 16, 17, et 18.
Indiquer la composition des noyaux correspondants.

B-3. Le plus abondant des corps purs simples formés avec l'oxygène est le dioxygène O_2. Proposer une formule de Lewis pour la molécule de dioxygène.

B-4. L'ozone (O_3) et le peroxyde d'hydrogène (H_2O_2) sont des molécules très utilisées pour le traitement des eaux à potabiliser.

B-4-1. Proposer une formule de Lewis pour la molécule d'ozone (cette molécule n'est pas cyclique et les 3 atomes d'oxygène respectent la règle de l'octet) et en déduire sa formule AX_nE_m associée au modèle de la répulsion des paires d'électrons de valence de Gillespie (formule VSEPR).

B-4-2. Déduire de la question B-4-1 la géométrie de la molécule d'ozone et la dessiner en faisant apparaître les doublets liants et les doublets non liants éventuels.

B-4-3. En justifiant votre réponse, indiquer, parmi les 6 valeurs suivantes, celle qui correspond à l'angle formé par les 3 atomes d'oxygène dans la molécule d'ozone : 90° ; 109,5° ; 117° ; 120° ; 178° ; 180°.

B-4-4. Proposer une formule de Lewis pour la molécule de peroxyde d'hydrogène (les 2 atomes d'oxygène respectent la règle de l'octet) et indiquer le nombre d'oxydation de l'oxygène dans cette molécule.

2- PHOTOGRAPHIE (extraits du concours CCINP 2021)

Une brève histoire de la photographie

Les images sont omniprésentes dans l'environnement et il peut sembler qu'elles l'ont toujours été. C'est pourtant loin d'être le cas. Longtemps le dessin et la peinture furent les seuls moyens utilisés pour représenter la réalité sur un support à deux dimensions et ce n'est qu'au XIX^e siècle qu'un procédé technique permit de " capturer " des images.

Partie I - Optique de l'appareil photo

La date conventionnelle de l'invention de la photographie a été fixée au 7 janvier 1839, date à laquelle Arago présenta à l'Académie des Sciences l'invention de Daguerre : le daguerréotype. Mais l'histoire de la photographie commence bien avant notamment avec la camera obscura (chambre noire) qui est utilisée dès le XVI^e siècle pour des travaux topographiques. Les historiens de l'art ont également montré qu'elle était utilisée par des peintres.

Le fonctionnement de cet ancêtre de l'appareil photo repose sur les propriétés des lentilles.

I.1 - Objet et image

On modélise un appareil photo (**figure 1**) par l'association d'une lentille mince (L) de focale $f' = \overline{OF'}$ appelée " objectif ", d'un capteur (C) sur lequel on souhaite récupérer l'image et d'un diaphragme (D) placé devant la lentille.

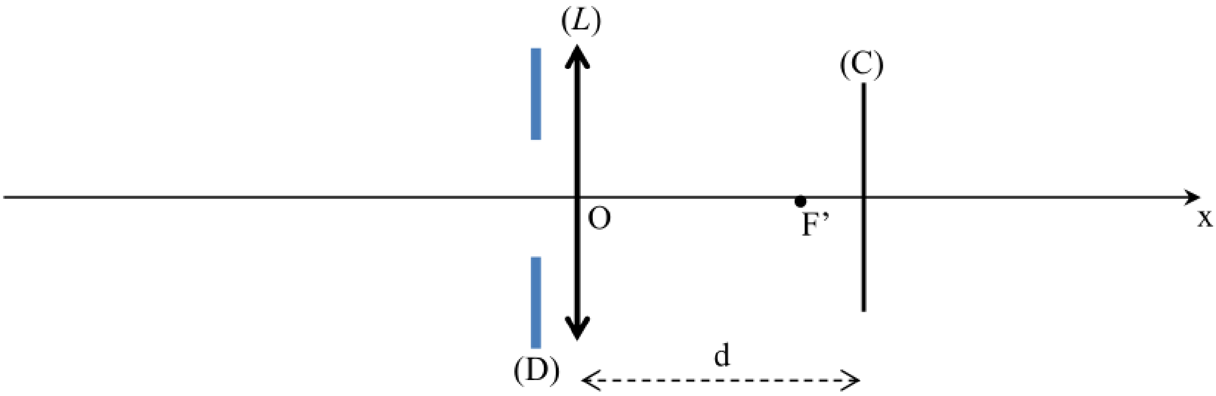


Figure 1 - Modélisation d'un appareil photo

La distance d entre la lentille (L) et le capteur (C) est réglable, grâce à un mécanisme lié à l'objectif ; elle est comprise entre d_{min} et d_{max}.

À l'aide de cet appareil, on souhaite former sur le capteur l'image d'un arbre de hauteur h situé à une distance L devant l'objectif.

Q1. **a)** La lentille mince est utilisée dans les " conditions de Gauss ". Préciser en quoi elles consistent.

b) Quelle partie de l'appareil permet d'assurer que ces conditions sont remplies ?

Q2. **a)** Faire un schéma soigné de la situation en notant AB l'objet et $A'B'$ son image sur le capteur (A est sur l'axe et AB appartient à un plan orthogonal à l'axe). Positionner les foyers principaux et tracer au moins deux rayons lumineux issus de B pour justifier la position de l'image $\overline{A'B'}$.

b) Exprimer la taille $\overline{A'B'}$ de l'image de l'arbre sur le capteur en fonction de h, f' et L. Calculer cette taille avec $f' = 50$ mm, $h = 5$ m et $L = 20$ m.

Rappel : l'objet AB et l'image $A'B'$ donnée par la lentille mince de centre O et de foyers principaux F (objet) et F' (image) dans les conditions de Gauss sont liés par les relations :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad ; \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad ; \quad \overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -\left(\overline{OF'}\right)^2 \quad ; \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} .$$

Q3. **a)** Quelle est la valeur de d lorsque l'objet est à l'infini ?

b) Montrer qu'il existe une distance limite notée L_{min} en dessous de laquelle il ne sera pas possible d'obtenir une image sur le capteur, alors que ce serait toujours possible pour des valeurs supérieures à L_{min}.

c) Exprimer L_{min} en fonction de f' et d_{max}.

d) Calculer L_{min} pour $f' = 50$ mm et $d_{max} = 55$ mm.

I.2 - Influence de la focale

On souhaite obtenir une image de l'arbre sur le capteur plus grande sans changer de place (donc en gardant la même valeur pour L). On change donc l'objectif et on le remplace par un objectif de focale $f_1' = 100$ mm. La distance d est toujours réglable mais les valeurs d_{min} et d_{max} sont différentes des valeurs de **Q3**.

Q4. **a)** Quelle sera la taille de l'image de l'arbre sur le capteur ?

b) Si on suppose que le capteur a pour dimensions : $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$, sera-t-il possible de voir l'arbre en entier sur la photo obtenue ?

Remarque : pour **Q5** et **Q6**, des approximations justifiées seront à faire.

Q5. L'objectif utilisé est appelé " téléobjectif " ou " objectif de longue focale ". Sur un site internet dédié à la photographie, on peut lire que ce genre d'objectif " rapproche les objets ". Commenter cette phrase en indiquant la part de vérité ou d'inexactitude qu'elle contient. Un raisonnement et un calcul numérique sont attendus (en utilisant une approximation justifiée).

On souhaite maintenant réaliser un téléobjectif en utilisant deux lentilles : une lentille (L_1) convergente et une lentille (L_2) divergente, séparées par une distance e. La distance L entre (L_1) et l'arbre n'a pas changé.

Q6. La lentille (L_1), de focale f_1', donne de l'arbre AB une image intermédiaire A_1B_1 qui joue le rôle d'objet pour la lentille (L_2), de focale f_2', qui en donne une image finale $A'B'$.

a) Exprimer la distance $\overline{O_2A_1}$ en fonction de f_1' et e (en utilisant une approximation justifiée).

b) L'image $A'B'$ doit être réelle. En déduire que la distance e entre les centres des deux lentilles doit être située dans une plage de valeurs bien précise. Exprimer cette condition sur e sous la forme d'une double inégalité sur e, f_1' et f_2' (en utilisant une approximation justifiée).

c) Vérifier que cette condition est réalisée avec $f_1' = 10$ cm, $f_2' = -5$ cm et $e = 8$ cm.

Q7. Avec les valeurs numériques de **Q6c** :

a) Calculer la distance d,

b) Calculer la taille de l'image $\overline{A'B'}$ de l'arbre sur le capteur.

c) Indiquer si ce téléobjectif est équivalent à l'objectif de **Q4.**

I.4 - Comment expliquer les propriétés des lentilles ?

Les propriétés optiques des lentilles viennent de leur forme géométrique.
Pour en proposer une explication, on considère une lentille plan-convexe (**figure 2**) constituée d'un verre d'indice n. L'indice de l'air ambiant est égal à 1.
La partie sphérique de la lentille est une portion de sphère de centre C et de rayon $R = CB$. L'épaisseur de la lentille au centre est $e = OS$.
On considère un rayon incident parallèle à l'axe optique, à une distance h de celui-ci. Ce rayon pénètre dans la lentille en A et est réfracté en B. On note i et r les angles incident et réfracté, comptés par rapport à la normale (CB). Le rayon émergent de la lentille coupe l'axe optique en F'.
On note K le projeté orthogonal de B sur l'axe optique.

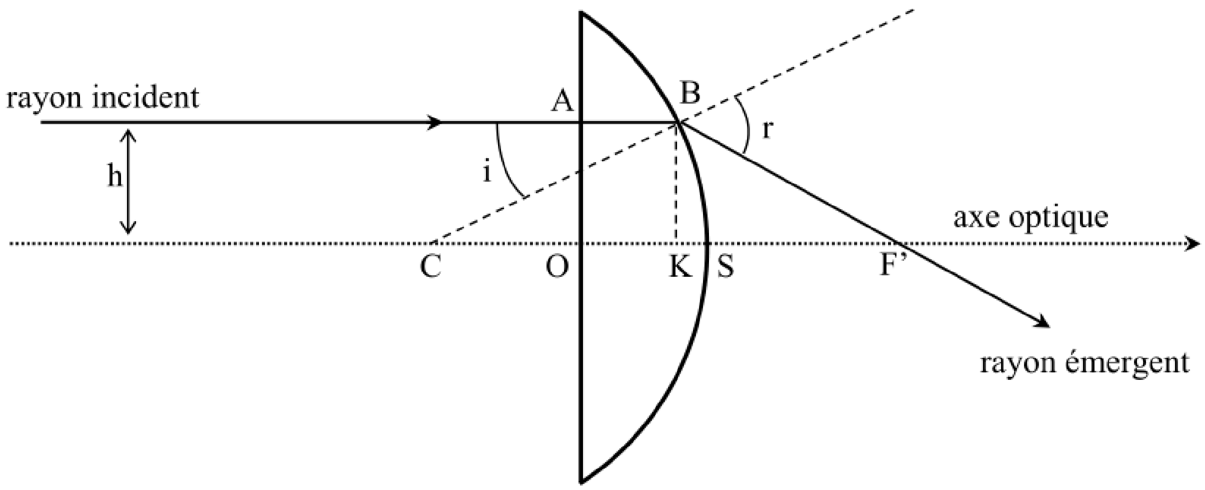


Figure 2 - Lentille plan-convexe

Q9. **a)** Écrire la loi de la réfraction en B.

b) Montrer que la distance OF' peut se mettre sous la forme :

$$OF' = e - R\left[1 - \cos(i)\right] + \frac{R\sin(i)}{\tan(r-i)}.$$

Q10. **a)** La lentille constitue-t-elle un système rigoureusement stigmatique ?

b) Si on considère une lentille mince (e faible devant R) et des rayons paraxiaux, peut-on dire que le système est approximativement stigmatique ? Justifier.

c) Dans le cas de la lentille mince, donner une expression approchée de la distance OF'.

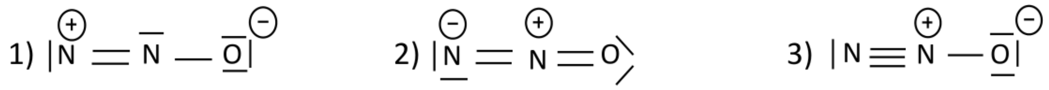
On rappelle que si $|x| \ll 1$, alors $\sin x \approx x$ et $\cos x \approx 1 - x^2/2$.

$- = \mathcal{FIN} = -$

MPSI 1 - DS 2 - 10/11/2022

1- STRUCTURES MOLECULAIRES (extraits de concours CCINP – corrigé ?)

On peut envisager avec un azote au centre les trois formes mésomères ci-dessous :



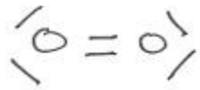
La 1) ne vérifie pas la règle de l'octet pour l'atome d'azote de gauche.
Pour la 2) et la 3) c'est bon pour chaque atome.

Entre la 2) et la 3) restantes, la 3) est plus probable à cause de l'électronégativité plus grande de l'atome d'oxygène par rapport à l'azote. On peut donc prévoir l'existence d'un moment dipolaire, mais affaibli par « l'oscillation » possible entre ces deux formes.

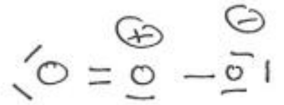
B.1 : $^{16}_{8}O$ $Z = 8$ de configuration électronique $1s^2 2s^2 2p^4$

B.2 : $^{18}_{8}O$ 8 protons et 10 neutrons

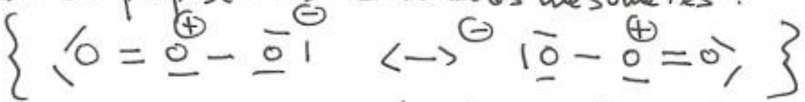
B.3 : O_2 16 ē de valence. Il y a 1 insaturation, on peut donc proposer



B.4.1. : Structure de Lewis

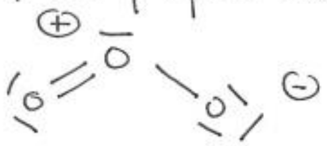


Il est possible de proposer les 2 formules mésomères :



En modèle VSEPR, on a une structure AX_2E autour de l'atome d'oxygène central.

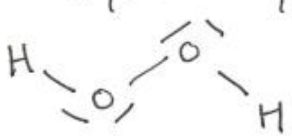
B.4.2. : On propose donc pour l'ozone une structure coudée :



issue d'une structure plane trivalente.

B.4.3. La structure plane trivalente suggère un angle voisin de 120°. La plus forte répulsion du doublet non liant entraîne une légère fermeture de l'angle formé par les 3 atomes d'oxygène qui est donc de 117°.

B.4.4. : Peroxyde d'hydrogène H_2O_2



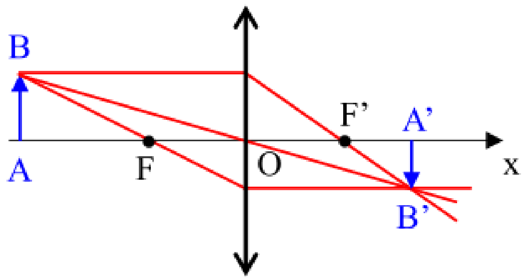
2- PHOTOGRAPHIE (extraits du concours CCINP 2021 – corrigé Vincent Lusset)

I.1 - Objet et image

Q1a. Les conditions de Gauss sont remplies si tous les rayons incidents :
– sont proches de l'axe optique ;
– sont peu inclinés par rapport à l'axe optique.
Les propriétés de stigmatisme et d'aplanétisme approchés sont alors vérifiées.

Q1b. Dans l'appareil photo modélisé figure 1, c'est le diaphragme qui permet d'assurer que les conditions de Gauss sont remplies.

Q2a. Pour placer A'B', les trois rayons incidents remarquables qu'on peut utiliser sont :
– le rayon incident passant par le centre optique O, qui n'est pas dévié ;
– le rayon incident parallèle à l'axe, qui donne un rayon émergent passant par le foyer image F' ;
– le rayon incident passant par le foyer objet F, qui donne un rayon émergent parallèle à l'axe optique.



Q2b. D'après la relation fournie on a :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \Leftrightarrow \overline{A'B'}=\overline{AB}\times\frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}=\overline{AB}\times\frac{\overline{FO}}{\overline{OA}+\overline{FO}} \Leftrightarrow \overline{A'B'}=h\times\frac{f'}{-L+f'}$$

Comme $L \gg f'$ on peut faire l'approximation : $\boxed{\overline{A'B'}\approx -h\times\frac{f'}{L}}$

A.N. : $\overline{A'B'}\approx -5\times\frac{0,050}{20} \Rightarrow \boxed{\overline{A'B'}=-0,0125\text{ m}=-12,5\text{ mm}}$ (NB : h est donné avec un seul chiffre significatif, mais le sujet perd de son intérêt si on respecte cela ; on aurait alors : $\overline{A'B'}=-0,01\text{ m}=-1\text{ cm}$)

Q3a. L'image d'un objet à l'infini se forme dans le plan focal image ; on a alors : $\boxed{d=f'=50\text{ mm}}$.

Q3b. Partant d'un objet lointain (et donc d'une image réelle), plus l'objet se rapproche de l'objectif (L diminue), plus l'image s'en éloigne (d augmente). Comme d est majoré par d_{max}, alors L est minoré par la valeur L_{min} correspondante.
A noter que l'énoncé affirme qu'il est toujours possible de former une image pour $L > L_{min}$; ça n'est vrai que si $d_{min} \leq f'$, ce qui n'est pas spécifié.
NB : on peut également dans cette question exprimer d en fonction de L et montrer que $d \leq d_{max}$ entraîne $L \geq L_{min}$.

Q3c. Relation de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{\overline{OA'}}-\frac{1}{\overline{OA}}=\frac{1}{f'} \Leftrightarrow -\overline{OA}=\frac{\overline{OA'}\times f'}{\overline{OA'}-f'} \Leftrightarrow \boxed{L_{min}=\frac{d_{max}\times f'}{d_{max}-f'}}$

NB : l'objet étant réel, $\overline{OA}<0$ donc $L_{min}=-\overline{OA}$

Q3d. A.N. : $L_{min}=\frac{55\times 50}{55-50} \Rightarrow \boxed{L_{min}=550\text{ mm}=0,55\text{ m}}$

I.2 - Influence de la focale

Q4a. On a toujours $L \gg f_1'$ d'où : $\overline{A'B'} \approx -5\times\dfrac{0,100}{20} \Rightarrow \boxed{\overline{A'B'} \approx -0,025\text{ m} = -25\text{ mm}}$

Q4b. On voit ainsi que l'image de l'arbre est plus grande que la dimension la plus petite du capteur ; on peut voir l'arbre en entier sur la photo <u>uniquement en mode « portrait »</u>.

Q5. L'image obtenue avec un téléobjectif de focale $f_1' = 2f'$ fait la même taille que celle obtenue avec f' pour une distance $L_1 = L/2$. En effet, tant que $L \gg f_1'$, on peut écrire :

$$\overline{A'B'} = h\times\frac{f_1'}{-L+f_1'} \approx h\times\frac{f_1'}{-L} = h\times\frac{2f'}{-L} = h\times\frac{f'}{-L/2}$$

<u>C'est en ce sens qu'on peut dire incorrectement qu'un téléobjectif rapproche les objets</u>.
La limite de cette affirmation est $f' \ll L_1 \Leftrightarrow f_1' \ll L$.

Q6a. Relation de conjugaison de Descartes pour (L_1) : $\dfrac{1}{\overline{O_1A_1}} - \dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{f_1'} \Leftrightarrow \overline{O_1A_1} = \dfrac{\overline{O_1A}\times f_1'}{\overline{O_1A}+f_1'}$

Avec $\left|\overline{O_1A}\right| \gg f_1'$ on a : $\overline{O_1A_1} \approx f_1'$; d'après la relation de Chasles on obtient ainsi :

$$\boxed{\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} \approx f_1' - e}$$

Q6b. Question plus difficile.
Une lentille divergente donne une image réelle (i.e. $\overline{O_2A'} > 0$) si et seulement si l'objet est situé entre le centre optique et le foyer objet. En effet, la relation de conjugaison de Descartes pour (L_2) donne :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'} \Leftrightarrow \overline{O_2A'} = \frac{\overline{O_2A_1}\times f_2'}{\overline{O_2A_1}+f_2'} \text{ donc } \overline{O_2A'} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{O_2A_1}\times f_2' > 0 \text{ et } \overline{O_2A_1}+f_2' > 0 \\ \text{ou } \overline{O_2A_1}\times f_2' < 0 \text{ et } \overline{O_2A_1}+f_2' < 0 \end{cases}$$

$$\text{soit } \overline{O_2A'} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{O_2A_1} < 0 \text{ et } \overline{O_2A_1}+f_2' > 0 \text{ : impossible (rappel} : f_2' < 0) \\ \text{ou } \overline{O_2A_1} > 0 \text{ et } \overline{O_2A_1} < -f_2' : A_1 \text{ entre O et } F_2 \end{cases}$$

Ainsi pour que A'B' soit réelle, il est nécessaire que A_1 soit situé entre O et F_2, soit : $0 < \overline{O_2A_1} < -f_2'$; on en déduit : $0 < f_1' - e < -f_2' \Leftrightarrow \boxed{f_1' + f_2' < e < f_1'}$

Q6c. On a bien : $\boxed{f_1' + f_2' = 5\text{ cm} < e = 8\text{ cm} < f_1' = 10\text{ cm}}$

Q7a. D'après ce qui précède : $\boxed{\overline{O_2A'} = \dfrac{\overline{O_2A_1}\times f_2'}{\overline{O_2A_1}+f_2'}}$ (NB : ici on n'a pas $\left|\overline{O_2A_1}\right| \gg f_2'$)

A.N. : avec $\overline{O_2A_1} \approx f_1' - e = 2\text{ cm}$ on obtient : $\overline{O_2A'} = \dfrac{2\times-5}{2-5} \Rightarrow \boxed{\overline{O_2A'} = 3\text{ cm}}$ (1 C.S…)

Q7b. D'après la formule du grandissement pour (L_1) et (L_2), on a : $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}$ et $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}}$

D'où : $\overline{A'B'} = \overline{AB}\times\dfrac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}\times\dfrac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}}$ soit : $\boxed{\overline{A'B'} = -\dfrac{hf_1'f_2'}{L\left(f_1' - e + f_2'\right)}}$

A.N.: $\overline{A'B'} = -\dfrac{5\times0,10\times-0,05}{20\times\left(0,10-0,08-0,05\right)} \Rightarrow \boxed{\overline{A'B'} = -0,04\text{ m} = -4\text{ cm}}$

Q7c. Le téléobjectif constitué d'une lentille convergente et d'une lentille divergente produit ainsi <u>une image de taille supérieure</u> à celle produite par une simple lentille convergente.

I.4 - Comment expliquer les propriétés des lentilles ?

Q9a. Loi de la réfraction : $\boxed{n\sin(i)=\sin(r)}$

Q9b. On a : $OF'=OS+SF'=OS+CF'-CS=OS+CK+KF'-CS$

Or : $OS=e$; $CS=R$; $CK=R\cos(i)$ et $KF'=\dfrac{BK}{\tan\left(B\hat{F}'K\right)}$. Comme $B\hat{F}'K=r-i$ et $BK=R\sin(i)$

on a finalement : $OF'=e+R\cos(i)+\dfrac{R\sin(i)}{\tan(i-r)}-R$ soit : $\boxed{OF'=e-R\left(1-\cos(i)\right)+\dfrac{R\sin(i)}{\tan(i-r)}}$

Q10a. On voit que les rayons lumineux venant d'un point à l'infini sur l'axe optique et dont l'image est censée être le foyer image, croisent l'axe optique après la lentille en un point qui dépend de l'angle i, donc de la distance h à l'axe optique du rayon incident. <u>La lentille n'est donc pas un système rigoureusement stigmatique</u>.

Q10b. & Q10c. Si on se limite aux rayons paraxiaux (ce qui correspond à $i \ll 1$ et donc $r \ll 1$), on a : $\sin(i)\sim i$, $\cos(i)\sim 1-\dfrac{i^2}{2}$ et $\tan(r-i)\sim r-i\sim(n-1)i$ d'après la loi de la réfraction.

Ainsi : $OF'\sim e-R\dfrac{i^2}{2}+\dfrac{Ri}{(n-1)i}\sim e+\dfrac{R}{n-1}$ au 1er ordre en i. Si par ailleurs $e \ll R$: $\boxed{OF'\sim\dfrac{R}{n-1}}$

OF' est maintenant indépendant de i et donc de h, <u>la lentille est approximativement stigmatique</u>.

– = *FIN* = –